SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1997-98

Ermanno Lanconelli

SULLA DISUGUAGLIANZA DI POINCARÈ PER CAMPI VETTORIALI

29 gennaio 1998

Tecnoprint - Bologna 1998

Riassunto. Viene presentato un metodo elementare per la dimostrazione della disuguaglianza di Poincarè sui dischi delle metriche di controllo relative a famiglie di campi vettoriali di classe C^1 su $\mathbb{R}^N$. Il metodo imita quello classico: si stima la differenza dei valori di una funzione in due punti distinti mediante integrazione lungo curve subunitarie.

Summary. In this note we present an elementary approach to the Poincare' inequality for general classes of C^1 vectors fields in $\mathbb{R}^N$. Our method is equally applicable to the classical case, and to those studied by Franchi-Lanconelli and by Jerison.

I risultati di questa nota sono stati ottenuti in collaborazione con D. Morbidelli.

SULLA DISUGUAGLIANZA DI POINCARÈ PER CAMPI VETTORIALI

E. LANCONELLI

1. Introduzione. Sia $X = (X_1, \dots, X_\nu)$ una famiglia finita di campi vettoriali di classe C^1 su $\mathbb{R}^N$.

Ricordiamo la ben nota definizione di distanza di controllo associata ad X. Una curva regolare a tratti $\gamma : [0,T] \to \mathbb{R}^N$ si chiama *X-subunitaria* se q.d. su $[0,T]$ risulta

$$|\langle \dot{\gamma}(t), \xi \rangle| \leq \sum_{j=1}^{\nu} |\langle X_j(\gamma(t)), \xi \rangle| \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Si indica con $\ell(\gamma)$ la lunghezza T dell'intervallo di parametrizzazione di γ. Se $x, y \in \mathbb{R}^N$ si pone

$$d(x,y) := \inf\{\ell(\gamma) \ / \ \gamma \quad X - \text{subunitaria}\ , \gamma(0) = x, \gamma(\ell(\gamma)) = y\}.$$

Se $d(x,y) < \infty$, cioè se esiste almeno una curva subunitaria che connette x e y qualunque siano $x, y \in \mathbb{R}^N$, allora d e' una *distanza* su $\mathbb{R}^N$ chiamata *metrica* di *controllo* relativa alla famiglia di campi X.

Nel seguito indicheremo con $B(x,r)$ il disco di centro x e raggio r:

$$B(x,r) := \{y \in \mathbb{R}^N \ / \ d(x,y) < r\}.$$

Supporremo che valga per i dischi B la proprietà di duplicazione

$$|B(x,2r)| \leq A|B(x,r)| \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, \forall r > 0 \tag{1.1}$$

($|B|$ misura di Lebesgue di B; $A \geq 1$ costante opportuna. Per l'uso che ne faremo nel seguito sarebbe sufficiente richiedere una versione locale di (1.1). Qui abbiamo assunto quella globale soltanto per semplicità). Da (1.1) si ottiene

$$|B(x,tr)| \leq At^Q|B(x,r)|, \quad Q = \log_2 A$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^N, \forall r > 0$ e $t \geq 1$.

Assumeremo inoltre che la distanza d sia *continua* rispetto alla distanza euclidea.

Lo scopo di questa nota è quello di studiare la seguente disuguaglianza di Poincarè sui dischi B della metrica di controllo:

$$\int_B |u - u_B| dx \leq Cr \int_B |Xu| dx, \quad \forall u \in C^1(\bar{B}). \tag{1.2}$$

Qui

$$u_B = \int u dx \quad \text{e} \quad |Xu| = \sum_{j=1}^{\nu} |X_j u|.$$

Questa disuguaglianza, sostanzialmente equivalente alla stima del minimo autovalore positivo del problema di Neumann su B per l'operatore

$$L = \sum_{j=1}^{\nu} X_j^* X_j \tag{1.3}$$

è fondamentale nello studio dei seguenti problemi

(I) Disuguaglianza di immersione di tipo Sobolev:

$$\left(\int_B u^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left(\int_B |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}, \quad u \in C_0^1(B). \tag{1.4}$$

Saloff-Coste [13] ha dimostrato che la disuguaglianza (1.2) implica la (1.4) con $p = 2Q/(Q-2)$. Questo risultato è stato esteso alle forme di Dirichlet da Biroli e Mosco [1].

(II) Esistenza di formule di rappresentazione del tipo seguente

$$|u(x) - u_B| \leq c \int_{cB} |Xu(y)| \frac{d(x,y)}{|B(x,d(x,y))|} dy, \quad x \in B. \tag{1.5}$$

Franchi, Lu e Wheeden [5] hanno dimostrato l'equivalenza fra la disuguaglianza di Poincarè (1.2) e la (1.5).

(III) Regolarità hölderiana delle soluzioni deboli dell'equazione

$$Lu := \sum_{j=1}^{\nu} X_j^* X_j u = 0. \tag{1.6}$$

Se vale la disuguaglianza di Poincarè (1.2) le soluzioni deboli di (1.6) sono localmente hölderiane [10].

Questo risultato si puó dimostrare utilizzando il procedimento iterativo di Moser, che si estende agli operatori (1.3) grazie ai risultati richiamati in (I) e (II) e alla X-lipschitzianità della metrica d, i.e. alla stima

$$|Xd| \leq c,$$

dimostrata da Franchi, Serapioni e Serra-Cassano [7].

(IV) Immersione compatta in $L^2(\Omega)$ dello spazio $\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_X(\Omega)$, completamento di $C_0^1(\Omega)$ rispetto alla norma

$$|u|_{L^2(\Omega)} + |Xu|_{L^2(\Omega)}.$$

Nella nota [7], con un argomento già contenuto in [6], viene dimostrato che (1.2) implica l'immersione compatta di $\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_X(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$ se Ω è limitato.

Vogliamo anche richiamare la nota di Garofalo e Nhieu [8] nella quale una disuguaglianza di Poincarè poco piú debole della (1.2) viene assunta come ipotesi di base per una profonda teoria generale degli spazi di tipo Sobolev $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}_X$.

Tutti i risultati fin qui richiamati mostrano il ruolo fondamentale della disuguaglianza di Poincarè. Tuttavia essa è nota, a tutt'oggi, soltanto in alcune situazioni particolari:

(FL) $X = (\lambda_1 \partial_{x_1}, \dots, \lambda_N \partial_{x_N})$, con le funzioni λ_j positive fuori dai piani coordinati e con andamenti di tipo potenza nelle variabili $x_1, \dots, x_N$. Questo caso è stato studiato in [2] e comprende, in particolare, il seguente: scrivendo $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^p_x \times \mathbb{R}^q_y$,

$$X_j = \partial_{x_j}, \quad j = 1, \dots, p, \quad Y_k = |x|^m \partial_{y_k}, \quad k = 1, \dots, q.$$

(H) $X = (X_1, \dots, X_\nu)$ con $X_j \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ e

$$\text{rango}\, \mathcal{L}(X_1, \dots, X_\nu)(x) = N \tag{1.7}$$

per tutti gli $x \in \mathbb{R}^N$.

In questo caso la disuguaglianza di Poincarè é stata dimostrata da Jerison [9] con un procedimento che utilizza l'Analisi sui gruppi di Lie e la tecnica del "lifting" ideata da Rotschild e Stein. La dimostrazione di Jerison presuppone la conoscenza della proprietà di duplicazione (1.1), ottenuta, nella stessa ipotesi (1.7), da Nagel, Stein e Wainger in [12], lavoro che precede di poco quello di Jerison.

Nella presente nota proponiamo una dimostrazione della disuguaglianza di Poincarè che unifica (FL) e (H) e che, al tempo stesso, sembra indicare una possibile via per ottenere (1.2) in condizioni diverse da quelle in (FL) e (H).

Il nostro metodo, in sostanza, imita la classica dimostrazione della disuguaglianza di Poincarè: la differenza tra i valori di una funzione in due punti distinti viene stimata mediante integrazione lungo curve X-subunitarie. Il metodo richiede che i dischi della metrica d siano rappresentabili mediante funzioni differenziabili e X-controllabili, in un senso che verrà precisato nel successivo paragrafo.

Nei casi (FL) e (H) questo tipo di rappresentazione era sostanzialmente già disponibile in [4] e [12], rispettivamente.

Vi sono almeno altri due lavori che devono essere citati in relazione alla presente nota. In [3] è dimostrata una disuguaglianza di Poincarè "non invariante" nell'ipotesi che esistano, localmente, delle "coordinate polari" adattate ai campi $X_1, \dots, X_\nu$. Questa ipotesi è difficile da verificare, anche

nel caso (H), ma occorre dire che ad essa è in parte ispirato il metodo qui proposto.

Varopoulos in [14] dimostra la disuguaglianza di Poincarè in un caso particolare di (H); quello in cui l'algebra di Lie $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_\nu)$ è libera e stratificata. In questo caso, sostanzialmente non dissimile da quello euclideo, è relativamente semplice rappresentare i dischi della metrica d mediante mappe controllabili e il nostro metodo risulta in tutto simile a quello di Varopoulos.

Concludiamo questa introduzione con alcune osservazioni. Anzitutto, come ha dimostrato Jerison in [9], la (1.2) si puó dedurre dalla seguente forma debole della disuguaglianza di Poincarè:

$$\int_B |u - u_B| dx \leq Cr \int_{\theta B} |Xu| dz \tag{1.8}$$

ove $\theta \geq 1$ e, se $B = B(x, r)$, $\theta B = B(x, \theta r)$. D'altra parte, osservato che

$$\int_B |u - u_B| dx \leq \frac{1}{|B|} \int_{B \times B} |u(x) - u(y)| dx dy,$$

la (1.8) si ottiene subito dalla seguente

$$\int_{B \times B} |u(x) - u(y)| dx dy \leq Cr|B| \int_{\theta B} |Xu| dz.$$

Noi dimostreremo quest'ultima disuguaglianza.

2. Mappe quasi esponenziali, X-connessioni e disuguaglianza di Poincarè. Consideriamo, in $\mathbb{R}^N$, un aperto Ω e un intorno dello zero Q. Una funzione di classe C^1

$$E : \Omega \times Q \to \mathbb{R}^N \tag{2.1}$$

sarà chiamata mappa *quasi esponenziale* (in breve q.e.) se

$$E(x, 0) = x, \quad \forall x \in \Omega.$$

Diremo che la mappa q.e. E è *canonica* se $E(x, \cdot)$ è iniettiva su Q e se, posto

$$D_E(x, h) := |\det \frac{\partial E}{\partial h}(x, h)| \quad \text{e} \quad D_E(x) = D_E(x, 0), \tag{2.2}$$

risulta

$$0 < \frac{1}{a} D_E(x) \leq D_E(x, h) \leq a D_E(x) \quad \forall x \in \Omega \quad \forall h \in Q, \tag{2.3}$$

per una opportuna costante $a = a(E) \geq 1$.

OSSERVAZIONE 2.1. *Una mappa q.e. ha il seguente sviluppo*

$$E(x,h) = x + A(x)h + \omega(x,h)h$$

ove $A(x) = \frac{\partial E}{\partial h}(x,o)$ *e* $\omega(x,h) \to 0$ *per* $h \to 0$. *Se* E *è canonica la matrice* $A(x)$ *é invertibile.*

Nel seguito, quando sarà necessario specificarne il dominio, useremo la notazione E_Ω^Q per indicare la mappa q.e. E in (2.1).

Diremo che E_Ω^Q è X-*controllabile* se esiste una funzione misurabile

$$\gamma : \Omega \times Q \times [0,T] \to \mathbb{R}^N, \quad T > 0,$$

tale che

(Γ1) Per ogni $(x,h) \in \Omega \times Q$, $\gamma(x,h,\cdot)$ è una curva X-subunitaria che connette x e $E_\Omega^Q(x,h)$, i.e.

$$\gamma(x,h,0) = x, \quad \gamma(x,h,T(x,h)) = E(x,h)$$

per un opportuno $T(x,h) \leq T$;

(Γ2) Per ogni $(h,s) \in Q \times [0,T]$, $\gamma(\cdot,h,s)$ è iniettiva e di classe C^1 e

$$m(\gamma) := \inf_{\mathcal{D}(\gamma)} \left| \det \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right| > 0, \quad \mathcal{D}(\gamma) := \Omega \times Q \times [0,T]. \tag{2.4}$$

In questo caso diremo che γ è una X-*connessione* di E_Ω^Q di *lunghezza*

$$\ell(\gamma) := \sup\{T(x,h) \ / \ x \in \Omega, h \in Q\}.$$

Poniamo

$$d(E_\Omega^Q) := \inf_\gamma \ell(\gamma)$$

dove l'estremo inferiore è preso rispetto a tutte le X-connessioni γ di E_Ω^Q. Il numero reale $d(E_\Omega^Q)$ verrà chiamato *diametro* (oppure X-diametro) di E_Ω^Q.

Chiameremo *tipo* di una mappa q.e. E_Ω^Q, canonica e X-controllabile, il numero reale

$$b(E_\Omega^Q) := \inf_{a,\gamma} \left(a + \frac{1}{m(\gamma)} \right). \tag{2.5}$$

L'estremo inferiore in (2.5) è preso rispetto alle costanti $a = a(E)$ in (2.3) e alle X-connessioni γ di E_Ω^Q.

La nostra ipotesi fondamentale per la disuguaglianza di Poincarè consiste nel richiedere che i dischi della metrica d siano rappresentabili mediante mappe quasi esponenziali canoniche X-controllabili.

TEOREMA 2.1. *Sia $B = B(x_0, r)$ il disco della metrica di controllo di centro x_0 e raggio $r > 0$. Supponiamo che, a meno di insiemi di misura nulla, si possa ricoprire B con un numero finito di aperti $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ con le seguenti proprietà: esistono delle mappe q.e. canoniche X-controllabili*

$$E_j := E_{\Omega_j}^{Q_j(r)}, \quad j = 1, \dots, n$$

tali che

$$B(x, r) \subseteq \{E_j(x, h) \ / \ h \in Q_j(r)\} \quad \forall x \in \Omega_j, \quad j = 1, \dots, m. \tag{2.6}$$

Allora, posto $d = \max_j \frac{d(E_j)}{r}$,

$$\int_{\frac{B}{2} \times \frac{B}{2}} |u(x) - u(y)| dx dy \leq Cr|B| \int_{\theta B} |Xu| dz \tag{2.7}$$

per ogni $u \in C^1(\overline{(2+d)B})$. La costante C dipende solo da n, dalla costante A in (1.1) e da $b = \max_j b(E_j)$; $\theta = (2 + d)$.

Alla dimostrazione del Teorema 2.1 premettiamo alcune osservazioni.

OSSERVAZIONE 2.2. *Sia $\gamma_j : \Omega_j \times Q_j(r) \times [0, T_j] \to \mathbb{R}^N$ una X-connessione di E_j avente lunghezza $\ell(\gamma_j) \leq (d+1)r$. Allora, poichè γ_j é subunitaria, per ogni $x \in \Omega_j$, per ogni $h \in Q_j(r)$ e per ogni $s \leq \ell(\gamma_j)$,*

$$d(x, \gamma_j(x, h, s)) \leq s \leq \ell(\gamma_j) \leq (d+1)r.$$

Di conseguenza,

$$\gamma_j(x, h, s) \in B(x_0, (d+2)r). \tag{2.8}$$

In particolare

$$\begin{aligned} B_j(x,r) &= \{E_j(x,h) = \gamma_j(x,h,T_j(x,h)) \ / \ h \in Q_j(r)\} \\ &= B_j(x,(d+1)r) \subseteq B(x_0,(d+2)r) \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE 2.3. *Esiste una costante positiva* $c = c(A, b(E_j), d)$ *tale che*

$$D_{E_j}(x) \leq cD_{E_j}(y) \quad \forall x, y \in \Omega_j. \tag{2.9}$$

Per dimostrare questa disuguaglianza osserviamo preliminarmente che possiamo scegliere la connessione γ_j e una costante $a = a(E_j) > 0$ tali che $a + \frac{1}{m(\gamma)} < 2b(E_j)$ e $1/aD_{E_j}(x) \leq D_E(x,h) \leq aD_{E_j}(x)$ per ogni $h \in Q_j(r)$ e per ogni $x \in \Omega_j$. Ció premesso, se x e y sono arbitrari punti di Ω_j, si ha:

$$\begin{aligned} D_{E_j}(x)|Q_j(x)| &\leq a \int_{Q_j(r)} D_{E_j}(x,h)dh = a|B_j(x,r)| \\ &\leq \text{(per Osservazione 2.1) } a|B(x,(d+1)r)| \\ &\leq (d(x,y) \leq 2r)a|B(y,(d+3)r)| \\ &\leq \text{(per la proprietà di duplicazione)} c|B(y,r)| \\ &\leq \text{(per (2.6))} c|B_j(y,r)| \\ &= c\int_{Q_j(r)} D_{E_j}(y,h)dh \leq caD_{E_j}(y)|Q_j(r)| \end{aligned}$$

Dimostrazione del Teorema 2.1. Se $u \in C^1((2+d)\overline{B})$ si ha

$$\int_{\frac{B}{2}\times\frac{B}{2}} |u(x)-u(y)|dxdy \leq \sum_{j=1}^{m} \int_{\frac{B}{2}\cap\Omega_j} \int_{B(x,r)} |u(x)-u(y)|dy$$

$$\leq \text{(per (2.6))} \sum_{j=1}^{m} \int_{\Omega_j} dx \int_{Q_j(r)} |u(r) - u(E_j(x,h))|D_{E_j}(x,h)dh$$

$\leq$ (per la (2.9) e con un fissato $\bar{x} \in \Omega_j$)

$$c\sum_{j=1}^{m} \int_{\Omega_j} dxD_{E_j}(\bar{x}_j) \left(\int_{Q_j(r)} dh|u(x) - u(E_j(x,h))| \right)$$

$$= c\sum_{j=1}^{m} \int_{\Omega_j} dxD_{E_j}(\bar{x}_j) \left(\int_{Q_j(r)} dh| \int_0^{T_j(x,h)} (\frac{d}{ds}u(\gamma_j(x,h,s)))ds| \right)$$

$$\leq c\sum_{j=1}^{m}\int_{\Omega_j} dx D_{E_j}(\bar{x}_j)\left(\int_{Q_j(r)} dh \int_0^{T_j(x,h)} |\langle \nabla u, \dot{\gamma}_j\rangle| ds\right)$$

$\leq$ (γ_j è X-subunitaria e $T_j(x,h) \leq \ell(\gamma_j) =: \ell_j$)

$$c\sum_{j=1}^{m}\int_{\Omega_j} dx D_{E_j}(\bar{x}_j)\left(\int_{Q_j(r)} dh \int_0^{\ell_j} ds |Xu(\gamma_j)|\right)$$

$$= c\sum_{j=1}^{m}\int_0^{\ell_j} ds\left(\int_{Q_j(r)} dh D_{E_j}(\bar{x}_j)(\int_{\Omega_j} dx |Xu(\gamma_j(x,h,s))|)\right)$$

$\leq$ (ponendo $z = \gamma_j(x,h,s)$, ricordando che $\dfrac{1}{m(\gamma_j)} \leq 2b$ e

utilizzando la (2.8)) $2cb\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\int_0^{\ell_j} ds \int_{Q_j(r)} dh D_{E_j}(\bar{x}_j)\int_{(2+d)B} |Xu(z)| dz$

$$= 2cb\left(\sum_{j=1}^{m}\ell_j \int_{Q_j(r)} D_{E_j}(\bar{x}_j) dh\right)\int_{(2+d)B} |Xu(z)| dz$$

$\leq$ (poichè $\ell_j \leq (1+d)r$ e poiché E_j è di tipo $\leq 2b$)

$$4cb^2(1+d)r\int_{(2+d)B} |Xu(z)| dz \sum_{j=1}^{m}\int_{Q_j(r)} D_{E_j}(\bar{x}_j, h) dh$$

$$= c_1 r\int_{(2+d)B} |Xu(z)| dz \sum_{j=1}^{m} |B_j(\bar{x}, r)|$$

$\leq$ per Osservazione 2.1 $c_1 m r |B(x_0, (d+2)r)| \displaystyle\int_{(2+d)B} |Xu(z)| dz$

$\leq$ (per la proprietà di duplicazione)$Cr|B| \displaystyle\int_{(2+d)B} |Xu(z)| dz$,

ove $C = C(m, A, d, b)$. Questo dimostra il teorema. □

3. Esempi. In questo paragrafo verificheremo che il caso classico euclideo, il caso (FL) e quello (H) rientrano nello schema proposto nel precedente paragrafo.

Esempio 1. (caso euclideo) Sia $X = (\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_N})$. La funzione

$$E : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N, \quad E(x,h) = x + h$$

è una mappa q.e. canonica. Per ogni intorno di zero $Q = Q(r) = \{|h| \leq r\}$, la funzione

$$(x, h, s) \mapsto \gamma(x, h, s) := x + s\frac{h}{|h|} \quad (= x \text{ se } h = 0)$$

è una X-connessione di $E^Q_{\mathbb{R}^N}$ avente diametro

$$d(E^Q_{\mathbb{R}^N}) \leq r.$$

Le ipotesi del Teorema 2.1 sono quindi verificate in quanto, ovviamente,

$$B(x, r) = \{x + h \ / \ h \in Q(r)\} = E^Q_{\mathbb{R}^N}(x, Q(r)).$$

Allora, per il Teorema 2.1,

$$\int_{B\times B} |u(x) - u(y)|dxdy \leq Cr^{N+1} \int_{4B} |\nabla u(z)|dz$$

per ogni disco euclideo $B = B(x_0, r)$ e per ogni $u \in C^1(\bar{B})$.

Esempio 2. Consideriamo in $\mathbb{R}^2$ la coppia di campi

$$X = (\partial_{x_1}, |x_1|^m \frac{\partial}{\partial x_2}), \quad m \in \mathbb{R}, m > 0.$$

Questo è un caso particolare di (FL), e ne costituisce il modello piú significativo, pur nella sua semplicità. Gli argomenti che useremo sono facilmente adattabili al caso piú generale.

Riprendendo le notazioni di [4] definiamo, per $x \in \mathbb{R}^2$ e $r > 0$

$$F_1(x, t) = t \quad \text{e} \quad F_2(x, t) = t|x_1 + t|^m$$

e poniamo $x^* = (|x_1|, |x_2|)$ e

$$\hat{B}(x, r) = \{x + h \ / \ |h_1| \leq F_1(x^*, r), \ |h_2| \leq F_2(x^*, r)\}.$$

In [4] è dimostrato che esiste una costante $a = a(m) > 0$ tale che

$$\hat{B}(x, \frac{r}{a}) \subseteq B(x, r) \subseteq \hat{B}(x, ar) \quad \forall x \in \mathbb{R}^2, \quad \forall r > 0.$$

Con questa precisa descrizione dei dischi B, dalla quale segue subito la proprietà di duplicazione e la continuità di d rispetto alla topologia euclidea, è

facile verificare le ipotesi del Teorema 2.1. Sia $B(\alpha, r)$ il disco di centro α e raggio r, α ed r arbitrari. Per ogni multi-indice $I = (i_1, i_2)$ a valori in $\{-1, 1\}$ poniamo

$$\Omega_I = \{x = (x_1, x_2) \in B(\alpha, r) \ / \ i_1 x_1 > 0, i_2 x_2 > 0\}.$$

Poniamo inoltre

$$Q(r) = \{h \in \mathbb{R}^2 \ / \ |h_j| \leq F_j(\alpha^*, 2ar), j = 1, 2\}.$$

Dimostriamo che

$$E_{\Omega_I}^{Q(r)}(x, h) := x + h$$

è X-controllabile ed ha diametro $d(E_{\Omega_I}^{Q(r)}(x, h)) \leq dr$, $d = d(m, a)$. Questo proverà che le ipotesi del Teorema sono soddisfatte poichè, ovviamente, $E_{\Omega_I}^{Q(r)}$ è canonica e la famiglia (Ω_I) è finita (il numero dei suoi elementi è ≤ 4). Dimostriamo l'affermazione nel caso di $I = (1, 1)$. Per ogni $x \in B(\alpha, r)$ risulta

$$\begin{aligned} B(x, r) \subseteq \hat{B}(x, ar) &= \{x + h \,|\, |h_j| \leq F_j(x^*, ar)\} \\ \subseteq \{x + h \,|\, |h_j| \leq F_j(\alpha, 2ar)\} &= \{x + h \,|\, h \in Q(r)\}. \end{aligned}$$

Definiamo ora una X-connessione per $E_{\Omega_I}^{Q(r)}$ ponendo

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$$

ove, posto $R = 2ar$ e $b = 2^m$,

$$\begin{aligned} &\gamma_1(x, h, s) = (x_1 + s, x_2) \quad \text{per } 0 \leq s \leq R \\ &\gamma_2(x, h, s) = (x_1 + R, x_2 + \frac{s}{b}||\alpha_1| + R|^m) \quad \text{per } 0 \leq s \leq \frac{bh_2}{||\alpha_1| + R|^m} \\ &\gamma_3(x, h, s) = (x_1 + R - s, x_2 + h_2) \quad \text{per } 0 \leq s \leq 2R. \end{aligned}$$

Allora

$$\gamma_1(x, h, 0) = x, \quad \gamma_2(x, h, r - h_1) = x + h,$$

$x \mapsto \gamma_j(x, h, s)$ è iniettiva e di classe C^1 con determinante della matrice Jacobiana

$$\det \frac{\partial \gamma_j}{\partial x}(x, h, s) \equiv 1.$$

Risulta poi

$$\begin{aligned}\ell(\gamma) &= \ell(\gamma_1) + \ell(\gamma_2) + \ell(\gamma_3)R + \frac{h_2}{|\alpha_1 + R|^m} + R \\ &\leq 2(2+b)ar \quad \text{(per la definizione di } Q(r)) = dr.\end{aligned}$$

Le curve $\gamma_1(x, h, \cdot)$ e $\gamma_3(x, h, \cdot)$ sono subunitarie in quanto, essendo

$$\dot{\gamma}_1 = \dot{\gamma}_3 = (1, 0),$$

sono entrambe curve integrali di X_1.

Mostriamo infine che anche γ_2 è X-subunitaria. Per ogni $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, $\xi \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}|\langle \dot{\gamma}_2(x, h, s), \xi\rangle| &= \frac{|\xi_2|}{b}||\alpha_1| + R|^m \\ &= \frac{|\xi_2|}{b}|x_1 + R + (|\alpha_1| - x_1)|^m \\ &\leq (|\alpha - x_1| \leq r,\ x_1 \geq 0)\ \frac{|\xi_2|}{b}2^m|x_1 + R|^m \\ &= \langle X_2(\gamma_2), \xi\rangle.\end{aligned}$$

Esempio 3. Siano $Y_1, \dots, Y_m \in \{X_1, \dots, X_\nu\}$ e sia $\alpha = (\alpha^1, \dots, \alpha^m)$ un multi-indice a valori in $\{1, \dots, N\}$. Poniamo

$$E(x, h) := (e^{h_{\alpha^1} Y_1} \circ \cdots \circ e^{h_{\alpha^m} Y_p})(x). \tag{3.1}$$

Se Ω è un arbitrario aperto limitato di $\mathbb{R}^N$, esistono $R_1, \dots, R_m > 0$ tali che, posto

$$Q = \{h \in \mathbb{R}^N \ / \ |h_{\alpha^k}| \leq R_k,\ k = 1, \dots, m\}$$

la funzione

$$\Omega \times Q \in (x, h) \mapsto E(x, h) := E_\Omega^Q(x, h)$$

è una mappa q.e. X-controllabile avente diametro

$$d(E_\Omega^Q) \leq \sum_{k=1}^m R_k.$$

Dimostriamo l'affermazione supponendo $p = 2, \alpha^1 = 1$ e $\alpha^2 = 2$. Il caso generale si puó trattare in modo del tutto analogo. Dal teorema di dipendenza C^1 dei dati iniziali delle soluzioni del problema di Cauchy relativo a campi C^1, segue subito che E^Q_Ω è una mappa q.e. Se gli R_k sono convenientemente piccoli, una X-connessione per E^Q_Ω si puó costruire ponendo

$$\gamma : \Omega \times Q \times [0, R_1 + R_2] \to \mathbb{R}^N,$$

$$\gamma(x,h,s) = \begin{cases} e^{s\,\mathrm{sgn}(h_2)Y_2}(x), & \text{per } 0 \le s \le |h_2| \\ e^{(s-|h_2|)\mathrm{sgn}(h_1)}(e^{h_2Y_2}(x)), & \text{per } |h_2| \le s \le R_2 + R_1. \end{cases}$$

Ovviamente γ è una curva subunitaria, e connette x e $E^Q_\Omega(x,h)$ in quanto

$$\gamma(x,h,0) = x \quad \text{e} \quad \gamma(x,h,|h_2| + |h_1|) = e^{h_1Y_1}(e^{h_2Y_2}(x)).$$

Ancora dalla teoria qualitativa delle equazioni differenziali ordinarie segue poi che $x \mapsto \gamma(x,h,s)$ è di classe C^1 e iniettiva e che, se $R_2 + R_1$ è convenientemente piccolo, $m(\gamma) > 0$. Risulta poi, ovviamente,

$$d(E^Q_\Omega) \le \ell(\gamma) = R_1 + R_2.$$

Esempio 4. Se i campi X_j sono di classe C^∞ e verificano l'ipotesi di Hörmander

$$\text{rango}\, \mathcal{L}(X_1, \dots, X_\nu) = N \tag{3.2}$$

in ogni punto di $\mathbb{R}^N$, con un procedimento analogo a quello seguito da Nagel-Stein-Wainger in [12] si dimostra l'esistenza di mappe q.e. canoniche ed X-controllabili aventi lunghezze confrontabili con la distanza di controllo. Per precisare questa affermazione è opportuno introdurre qualche altra notazione.

Se $Y_1, \dots, Y_m \in \{X_1, \dots, X_\nu\}$, definiamo

$$C(s; Y_1) = e^{sY_1}, \quad C(s; Y_1, Y_2) = e^{sY_1}e^{sY_2}e^{-sY_1}e^{-sY_2}$$

e

$$C(s; Y_1, \dots, Y_m) = e^{sY_1}C(s; Y_2, \dots, Y_m)e^{-sY_1}C(s; Y_2, \dots, Y_m)^{-1}.$$

Se $(Y_1, \dots, Y_m) = (X_{\alpha^1}, \dots, X_{\alpha^m})$, posto $\alpha = (\alpha^1, \dots, \alpha^m)$ e $|\alpha| = m$, definiamo

$$X_\alpha = [Y_1, [Y_2, [\cdots [Y_{p-1}, Y] \cdots]$$

e

$$\exp^*(sX_\alpha) = \begin{cases} C(s^frac1m; Y_1, \dots, Y_m) & \text{se} \quad s > 0, \\ C(|s|^{\frac{1}{m}}; Y_1, \dots, Y_m)^{-1} & \text{se} \quad s < 0. \end{cases}$$

La funzione $(x, s) \mapsto \exp^*(sX_\alpha)(x)$ è di classe C^1 e risulta

$$\exp^*(sX_\alpha)(x) = e^{sX_\alpha}(x) + \omega(x, s)|s|^{1+\frac{1}{m}}$$

dove ω è una funzione localmente limitata in $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$. Queste ultime affermazioni si dimostrano in modo standard utilizzando la formula di Campbell-Hausdorff (si veda [11] e [12]).

Sia ora $I = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ una N-pla di multi-indici e poniamo

$$E_I(x, h) := \exp(h_1 X_{\alpha_1}) \circ \cdots \circ \exp(h_N X_{\alpha_N})(x).$$

Allora, se i vettori $X_{\alpha_1}(x), \dots, X_{\alpha_N}(x)$ sono linearmente indipendenti, E_I è una mappa q.e., canonica in un intorno di x.

Osserviamo che

$$D_{E_I}(x) = \lambda_I(x) := |\det[X_{\alpha_1}(x), \dots, X_{\alpha_N}(x)]|.$$

Denotiamo poi con $|\cdot|_I$ la norma anisotropa

$$|h|_I := \sum_{j=1}^{N} |h_j|^{\frac{1}{|\alpha_j|}}$$

e definiamo

$$Q_I(r) := \{h \in \mathbb{R}^N \ / \ |h|_I \leq r\}, \quad r > 0.$$

Sia Ω un arbitrario (fissato) aperto limitato di $\mathbb{R}^N$. Per la condizione di Hörmander (3.2) esiste un intero $m = m(k) \geq 1$ tale che

$$\dim \mathcal{L}\left(\{X_\alpha(x) \ / \ |\alpha| \leq m\}\right) = N \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

Poniamo allora, infine,

$$\mathcal{I} = \{I = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \ / \ |\alpha_j| \leq m \quad \text{per } j = 1, \dots, N\}$$

e, se $I = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$,

$$m(I) = |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_N|.$$

TEOREMA 3.1. *Esistono $c > 1$ e $r_0 > 0$, entrambi dipendenti da $\bar{\Omega}$, con le seguenti proprietà: se $x \in \Omega$, se $0 < r < r_0$ e se*

$$\lambda_I(x) r^{m(I)} > \frac{1}{2}\Lambda(x,r), \quad \Lambda(x,r) := \max_{J \in \mathcal{I}} \lambda_J(x) r^{m(J)},$$

allora

(*i*) $\frac{1}{4}\lambda_I(x) \leq D_{E_I}(x,h) \leq 4\lambda_I(x) \ \ \forall h \in Q(cr)$

(*ii*) $h \mapsto E_I(x,h)$ *è iniettiva su* $Q_I(x,r)$ *e*

$$B(x,r) \subseteq \{E_I(x,h) \ / \ h \in Q_I(cr)\}.$$

Questo teorema è una versione adattata alle mappe exp* del Teorema 7 di [12]. Da questo teorema e da quanto dimostrato nell'Esempio 3 si ottiene facilmente il corollario seguente.

COROLLARIO 3.1. *Fissato $r \in]0, r_0[$ sia*

$$\Omega_I = \{x \in \Omega \ / \ \lambda_I(x) r^{m(I)} > \frac{1}{2}\Lambda(x,r)\}.$$

Allora E_I è una mappa q.e. su $\Omega_I \times Q_I(cr)$, canonica e X-controllabile, avente diametro

$$d(E^{Q_I}_{I,\Omega_I}) \leq C_I r.$$

C_I è una costante positiva indipendente da r. Risulta poi

$$B(x,r) \subseteq \{E_I(x,h) \ / \ h \in Q_I(cr)\}$$

per ogni $x \in Q_I$.

Questo corollario dimostra che le ipotesi del Teorema 2.1 sono verificate per tutti i dischi $B \subseteq \Omega$ in quanto $\mathcal{I}$ è finito.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] M. Biroli and U. Mosco, *Sobolev inequalities on Homogeneous spaces*, Potential Anal. 4 (1995), pp. 311-324.

[2] B. Franchi and E. Lanconelli, *Hölder regularity theorem for a class of linear nonuniformly elliptic operators with measurable coefficients*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 10 (1983), pp. 523–541.

[3] ——, *Une condition géometrique pur l'inégalité de Harnack*, J. Math. Pures Appl., 9 (1985), pp. –.

[4] ——, *Une métrique associeé á une classe d'operateurs elliptiques dégenéres*, in Proceedings of the meeting "Linear Partial and Pseudo Differential operators, Rend. Sem. Mat. Univ. e Politec. Torino, Torino, 1982.

[5] B. Franchi, G. Lu, and R. L. Wheeden, *A relationship between Poincaré-Type inequalities and representation in spaces of homogeneous type*, Intl. Math. Research Notices, 1 (1996), pp. 1–16.

[6] B. Franchi and R. Serrapioni, *Pointwise estimates for a class of strongly degenerate elliptic operators: a geometrical approach*, Ann. sc. Norm. Sup. Pisa 14 (1987) pp. 527-568.

[7] B. Franchi, R. Serapioni, and F. S. Cassano, *Approximation and imbedding theorems for weighted Sobolev spaces associated with Lipschitz continuous vector fields*, Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, (1996).

[8] N. Garofalo and D. M. Nhieu, *Isoparametric and Sobolev inequalities for Carnot-Carathéodory spaces and the existence of minimal surfaces*, Comm. Pure and Appl. Math.

[9] D. Jerison, *The Poincaré inequality for vector fields satisfying Hormander condition*, Duke Math. J. 53 (1986), pp. 503-523.

[10] E. Lanconelli, *Alcuni aspetti dell'Analisi Reale negli spazi omogeni. Regolarizzazione delle soluzioni deboli delle equazioni P-Ellittiche*, Seminario di Analisi Matematematica, Dip. di Mat. Bologna, 1995-1996, pp. 54-71.

[11] E. Lanconelli, *Stime sub-ellittiche e metriche Riemanniane singolari*, Seminario di Analisi Matematematica, Ist. Mat. Bologna, 1982-1983, VII.1-VII.

[12] A. Nagel, E. M. Stein, and S. Wainger, *Balls and metric defined by vector fields 1: basic properties*, Acta Math., 155 (1985), pp. 103–147.

[13] L. Saloff-Coste, *A note on Poincare', Sobolev and Harnack inequalities*, Internat. Math. Res. Notices 2 (1992) pp. 27-38.

[14] N.TH. Varopoulos, *Fonctions armoniques sur le Groupes de Lie*, C.R.A.S. Paris Ser I Math. 304 (1987), pp. 510-521.